PROPUESTA PARA TRABAJAR LA DEMOSTRACIÓN EN EL NIVEL TERCIARIO

Sara Scaglia, Fernanda Renzulli y Marcela Götte
Facultad de Humanidades y Ciencias. Argentina
scaglia@fhuc.unl.edu.ar, fernandarenzulli@gmail.com, mgotte@fhuc.unl.edu.ar

Nivel educativo: terciario
Palabras clave: demostración, conjeturas, geometría, enseñanza.

Resumen

El objetivo de la comunicación es describir los lineamientos teóricos y las actividades de una propuesta pensada para promover el sentido de la demostración en estudiantes de tercer año de Profesorado de Educación Especial en Sordos e Hipoacúsicos de un instituto de nivel terciario de la ciudad de Santa Fe.

En general, se ha puesto de manifiesto en distintas investigaciones que las actividades en las que se exige "probar que…" una determinada afirmación es verdadera no resultan efectivas para desencadenar la producción de argumentos. Las propuestas más efectivas están relacionadas con aquellas actividades en las que se requiere de la producción de una conjetura, puesto que los argumentos que surgen durante la actividad de conjeturar (se presume) serán utilizados posteriormente durante la demostración del resultado.

La propuesta versa en torno a las propiedades de las diagonales de los paralelogramos y demanda de parte de los estudiantes un trabajo cooperativo en torno al enunciado de conjeturas, la resolución de conflictos, la presentación de argumentos y evidencias, la formulación de hipótesis y la demostración de afirmaciones no obvias.

1. Introducción

En la actualidad existe en general consenso acerca de que un objetivo importante de la educación matemática es el desarrollo del sentido de la demostración (Mariotti, 2006). En efecto, en documentos curriculares recientes, se afirma que el razonamiento y la demostración no deben aparecer esporádicamente en las clases de matemática, sino que deben formar parte natural de las discusiones de clase.

En los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios se observa una progresión paulatina en la práctica de plantear conjeturas y proponer argumentos que permitan sostenerlas. En efecto, desde los primeros años se recomienda "la exploración de la validez de afirmaciones propias y ajenas" (2004, p. 15), en tanto que a partir de 4º año plantea "la producción de conjeturas y de afirmaciones de carácter general, y el análisis de su campo de validez" (2005, p. 16). A partir de 7º año se sugiere "la producción e interpretación de conjeturas y afirmaciones de carácter general y el análisis de su campo de validez, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales" (2006, p. 16). Esta graduación, como veremos, se ajusta a las recomendaciones de las investigaciones respecto del trabajo de la demostración en los distintos niveles educativos.

En los Estándares Curriculares del NCTM, ya desde la década del noventa del siglo pasado se plantea como objetivo que los alumnos "aprendan a razonar matemáticamente", incluyendo la capacidad de "formular hipótesis, recopilar evidencias y elaborar un argumento que apoye estas nociones" (NCTM, 1991; p. 7). En los Estándares correspondientes a la década actual se propone "reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, formular e investigar conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones y elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración" (NCTM, 2003; p. 59).

Los párrafos anteriores muestran la importancia adjudicada a la demostración en las recomendaciones curriculares. No obstante, la actividad propia de demostrar resultados genera muchas dificultades, bien documentadas en la bibliografía (Battista y Clements, 1995). Mariotti (2006) observa una evolución desde los primeros estudios, en los que se enfoca sobre las concepciones de los estudiantes (incluso de profesores) de la demostración hacia estudios más actuales donde se presentan y discuten opiniones sobre si es posible superar las dificultades y, en caso de que lo sea, cuáles serían intervenciones de enseñanza apropiadas.

La presente comunicación se encuadra en este último tipo de estudios, dado que su objetivo es describir los lineamientos teóricos y las actividades de una propuesta pensada para promover el sentido de la demostración en estudiantes de Profesorado de Educación Especial en Sordos e Hipoacúsicos de un instituto de nivel terciario de la ciudad de Santa Fe. La propuesta versa en torno a las propiedades de las diagonales de los paralelogramos.

A continuación se presentan algunos elementos teóricos dentro de los que se enmarca la propuesta, y posteriormente se presentará la guía completa de actividades.

2. Aportes teóricos

Tanto la teoría de Piaget como la de Van Hiele sugieren que los estudiantes deben pasar por niveles bajos de pensamientos geométricos antes de que puedan alcanzar niveles superiores, y que este pasaje toma una considerable cantidad de tiempo (Battista y Clements, 1995). Según la teoría de Van Hiele, la instrucción debería ayudar a los estudiantes a progresar gradualmente desde niveles inferiores de pensamiento geométrico antes de comenzar un estudio de geometría orientado hacia la demostración. Se considera que enfrentar a los estudiantes prematuramente a la prueba formal puede conducirlos a sólo intentos de memorización y a confundir el propósito de la prueba (Battista y Clements, 1995).

Numerosas investigaciones (Battista y Clements, 1995) proponen una alternativa a las aproximaciones axiomáticas, llevando a los estudiantes a realizar justificaciones significativas. Se propone que los estudiantes trabajen cooperativamente, realizando conjeturas, resolviendo conflictos y presentando argumentos y evidencias, probando afirmaciones no obvias y formulando hipótesis para probar.

El currículo geométrico de la escuela secundaria debería ser apropiado para todos lo niveles de pensamiento a través de los cuales los estudiantes pasan a lo largo del año (Battista y Clements, 1995). Se debería guiar a los estudiantes a aprender sobre conceptos significativos e interesantes y permitir usar justificaciones visuales y empíricas porque tal pensamiento es el fundamento para niveles superiores. Se debería requerir que los estudiantes expliquen y justifiquen sus ideas, refinen su pensamiento y que gradualmente comprendan las limitaciones de las justificaciones visuales y empíricas para que de esta forma comiencen a utilizar los componentes críticos de la prueba formal, pero la prueba formal es apropiada si los estudiantes pueden usarla como una manera de justificar ideas de manera significativa. El camino más efectivo para engendrar un uso significativo de la prueba en la geometría de la escuela secundaria es evitar la prueba formal en muchos estudiantes, apuntando sobre la justificación de ideas y construyendo las bases visuales y empíricas para niveles superiores de pensamiento geométrico.

Algunos autores ponen de relieve una discrepancia entre argumentación y demostración. Para Duval (1999, p. 43), "la argumentación es aquel tipo de razonamiento que se halla intrínsecamente ligado al uso del lenguaje común. Y por esto pareciera ser la forma natural de razonamiento. En efecto, se pone en movimiento de manera espontánea en todas las situaciones donde un parecer, una afirmación, una opinión, o una elección se pueden poner en duda y requieren de una justificación". La demostración consiste en una secuencia lógica de implicaciones de las que se deriva la validez teórica de una afirmación. Este autor afirma que la concepción de demostración como un proceso que busca convencer al interlocutor puede conflictuar con los requerimientos de una demostración matemática. En un sentido similar, Balacheff (1999) considera que "la argumentación constituye un obstáculo epistemológico para la demostración".

Esta ruptura intenta ser superada por algunos autores proponiendo la noción de "unidad cognitiva". Durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su afirmación a través de una actividad argumentativa intensa. Posteriormente, durante el proceso de demostrar la afirmación, el estudiante conecta de un modo coherente algunas de las justificaciones ("argumentos") producidas durante la construcción de la afirmación de acuerdo a una cadena lógica.

En general, se ha puesto de manifiesto en algunas investigaciones que las actividades en las que se exige "probar que…" una determinada afirmación es verdadera no resultan efectivas para desencadenar la producción de argumentos (Mariotti, 2006). Las propuestas más efectivas, sostienen, están relacionadas con aquellas actividades en las que se requiere de la producción de una conjetura. "En este último caso es posible esperar que los argumentos surjan para alimentar el razonamiento y este tipo de situación es sugerida como útil para aproximar el tema de la demostración en la escuela por esta razón" (Mariotti, 2006; p. 189).

Finalmente, hay dos aspectos importantes a tener en cuenta en una propuesta que tiene como objetivo desarrollar en los estudiantes el sentido de la demostración. Por un lado, el hecho de que para hablar de demostración matemática se deben tener en cuenta dos elementos: una afirmación y una teoría completa. "Desde una perspectiva teórica, la demostración de una afirmación válida es realizada aceptando tanto la verdad hipotética de los axiomas establecidos como el hecho de que las reglas establecidas de inferencia "transforman verdad en verdad"" (Mariotti, 2006, p.184).

Por otro lado, no puede dejar de considerarse la dimensión social de la demostración. En efecto, "la demostración tiene sentido respecto de una comunidad que comparte (más o menos implícitamente) los criterios de aceptabilidad de los argumentos en juego" (Mariotti, 2006; p.188). En la comunidad de matemáticos, existe una serie de criterios de aceptabilidad compartidos que son respetados por sus miembros para la elaboración de demostraciones. En la comunidad escolar, resultaría complicado trabajar a partir de estos cánones de aceptabilidad, por lo que es necesario 'aliviar' las exigencias si se espera tener algún éxito en la producción de justificaciones de las conjeturas enunciadas. El rol del profesor es el de "mediador cultural" que debe proponerse introducir a los estudiantes en los estándares de la validación matemática (Mariotti, 2006).

3. Descripción de la propuesta

Las líneas teóricas anteriores conducen a considerar determinadas cuestiones en la propuesta objeto de esta comunicación.

Por un lado, se ha optado por proponer actividades que requieran de la conjetura de las propiedades y su posterior justificación, dado que, como se ha planteado en el marco teórico, los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar argumentos (durante la formulación de conjeturas) que podrían utilizar posteriormente en la producción de una demostración de la conjetura.

Por otro lado, se considera necesario introducir un apartado en el que se describen los conocimientos y actividades previas, con el objeto de establecer un marco de conocimientos geométricos que proporcione a los alumnos elementos conceptuales útiles para ser aprovechados posteriormente en las actividades de conjeturar y justificar propiedades geométricas.

3.1. Algunos elementos metodológicos

La investigación se sitúa en el paradigma interpretativo (Cohen y Manion, 1990) y la metodología es cualitativa. En la presente comunicación se presentan los lineamientos generales de la propuesta de actividades, en tanto que se espera en una segunda etapa desarrollar un estudio descriptivo en pequeña escala, cuya finalidad es la interpretación de las respuestas y producciones de sujetos.

La propuesta ha sido diseñada para implementar en un tercer año del Profesorado de Educación Especial en Sordos e Hipoacúsicos de un instituto terciario de la ciudad de Santa Fe.

3.2. Actividades y conocimientos previos

Los estudiantes que participan de la propuesta desarrollaron durante su segundo año de estudio conocimientos relacionados con las propiedades de los ángulos determinados entre rectas paralelas cortadas por una transversal. En actividades previas se revisaron los criterios de congruencia de triángulos.

Con respecto al estudio propiamente dicho de los cuadriláteros, durante las dos semanas previas a la implementación de la propuesta se desarrollaron actividades tendientes a trabajar la clasificación de los cuadriláteros según el paralelismo de lados opuestos, obteniéndose la siguiente clasificación:

- Trapezoide: no tiene lados paralelos
- Trapecio: un par de lados paralelos
- Paralelogramo: dos pares de lados paralelos

A continuación se describen las actividades previas.

Actividad previa Nº 1

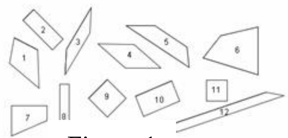
Figura 1

a) Agrupar los siguientes cuadriláteros (ver Figura 1) según alguna característica, de modo que ninguna figura quede sin formar parte de algún grupo.
Escriban la característica que tuvieron en cuenta para armar cada grupo.

Durante la resolución de la actividad, los alumnos que trabajaron en grupos utilizaron como criterio de clasificación la igualdad de los lados, la amplitud de los ángulos y el paralelismo de lados opuestos.
Surgieron así las siguientes clasificaciones:
Grupo 1

- Dos lados iguales y dos desiguales.
- Los cuatro lados desiguales.
- Los cuatro lados iguales.

Grupo 2

- Poseen cuatro ángulos rectos.
- No poseen los cuatro ángulos de 90º.

Grupo 3

- Cuatro lados iguales.
- Cuatro lados no iguales.

Grupo 4

- Dos pares de lados opuestos paralelos.
- Un solo par de lados opuestos paralelos.
- Ningún par de lados opuestos paralelos.

El análisis de estas producciones queda fuera de los objetivos del presente trabajo. No obstante, se puede consultar una comparación de las producciones de estudiantes de Profesorado de Nivel Inicial y de 8º año de EGB en torno a esta actividad en Renzulli y Scaglia (2007).
Para finalizar esta actividad se institucionalizaron las definiciones de paralelogramo, trapecio y trapezoide, como los cuadriláteros que responden a la última clasificación.

Actividad previa Nº 2

a) Escribir todas las características del cuadrilátero 13 (Figura 1).
b) Escribir todas las características del cuadrilátero 8 (Figura 1).
c) Escribir todas las características del cuadrilátero 9 (Figura 1).

En la puesta en común se plantearon las siguientes características para cada uno de los cuadriláteros:

Cuadrilátero 13:

- Posee los cuatro lados iguales.
- Posee los lados opuestos paralelos.
- Posee los ángulos opuestos iguales.

Cuadrilátero 8:

- Posee dos lados iguales y dos lados iguales.
- Posee cuatro ángulos rectos.
- Posee los lados opuestos paralelos.

Cuadrilátero 9:

- Tiene los ángulos opuestos iguales.
- Posee cuatro ángulos rectos.
- Posee cuatro lados iguales.
- Posee los lados opuestos paralelos.

A partir de esta actividad se institucionalizaron las definiciones de rombo, rectángulo y cuadrado. Se trabajó a partir de una clasificación jerárquica de estos cuadriláteros (De Villiers, 1994) caracterizada porque los conceptos más particulares forman subconjunto de los conceptos más generales.

Actividad previa Nº 3

A partir de la manipulación de figuras recortadas en papel los alumnos conjeturan la propiedad de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. La profesora (integrante, además, del equipo de investigación) guió mediante preguntas la escritura de la demostración en el pizarrón, a partir de la utilización de criterios de congruencia de triángulos.

Actividad previa Nº 4

Mediante el mismo procedimiento que en la actividad anterior se trabaja la propiedad de que en todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes.

Actividad previa Nº 5

Se conjetura (mediante la manipulación de figuras recortadas en papel) la propiedad de que en todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes. La demostración de la conjetura se dejó para que los estudiantes realicen de tarea, en forma individual.

3.2. Propuesta

Para el estudio de las propiedades de las diagonales de los distintos paralelogramos, se proponen una serie de actividades grupales. El curso fue dividido en 6 equipos de entre 3 y 4 alumnos cada uno.

Dos equipos (Nº 1 y 2) trabajaron sobre el rectángulo, otros dos (Nº 3 y 4) sobre el rombo y los dos restantes (Nº 5 y 6) sobre el cuadrado. Como los enunciados de las actividades son similares (salvo el tipo de paralelogramo involucrado), se describen a continuación únicamente las actividades propuestas para los dos grupos que trabajaron sobre el rectángulo.

ACTIVIDAD 1 ¿Qué condiciones deben cumplir las diagonales de un cuadrilátero para que sea un rectángulo? Escribir la respuesta en este papel.

Una vez que los dos equipos terminan la actividad, se retiran sus producciones y se intercambian para que, atendiendo a la producción del grupo que trabaja sobre el mismo cuadrilátero, cada equipo responda a la consigna de la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 2 Pensar y dibujar cuadriláteros que no sean rectángulos pero que cumplan las condiciones dadas. (Aquí las condiciones dadas refieren a las que el otro grupo fijó para las diagonales del rectángulo)

Cuando un grupo encuentra un contraejemplo, se da esta información al grupo que ha elaborado las condiciones, para que rehaga su trabajo, tratando de producir nuevas condiciones que superen el contraejemplo dado por sus compañeros. Luego las nuevas condiciones regresan al grupo que controla, para que busque nuevos contraejemplos. La 'ida y vuelta' concluye cuando no se encuentran más contraejemplos, lo que aseguraría que las condiciones dadas para las diagonales del rectángulo son necesarias y suficientes. Justamente el objetivo de este intercambio es que se puedan elaborar una serie de condiciones necesarias y suficientes para las diagonales de cada paralelogramo.

La razón por la que se decide el intercambio es para evitar situaciones en las que sea el profesor el que termina validando o no las producciones de cada grupo en la actividad 1. Se obliga así a los estudiantes a ejercer el control sobre las producciones propias y las de sus compañeros.

Ante la posibilidad de que los estudiantes no encuentren contraejemplos de cuadriláteros en la actividad 2 aunque estos existan, la docente del grupo prepara dibujos de cuadriláteros especiales, que satisfacen determinadas características. En la siguiente sección se describen las figuras preparadas por el docente, dado que están en relación directa con las posibles respuestas dadas por los estudiantes en la actividad 1.

Una vez que se ha logrado un enunciado de condiciones satisfactorio para las propiedades de las diagonales de los paralelogramos, se pasa a las siguientes actividades.

ACTIVIDAD 3 Elaborar una propiedad en la que se indica cómo son entre sí las diagonales del rectángulo.

ACTIVIDAD 4 Probar la propiedad enunciada.

3.3. Procedimientos esperados en la actividad 1

Algunas de las posibles respuestas de los alumnos respecto de las condiciones que deben cumplir las diagonales de un cuadrilátero para que sea un rectángulo se incluyen a continuación:

A) Las diagonales se cortan en su punto medio.

B) Las diagonales son iguales.

C) Las diagonales son perpendiculares.

D) Las diagonales son iguales y perpendiculares.

E) Las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio (respuesta correcta).

Como se ha indicado, se esperaba que en caso de que las condiciones formuladas por un equipo no fueran correctas, el otro equipo encontrara contraejemplos para esas situaciones. No obstante, la docente había preparado los siguientes contraejemplos para el caso del rectángulo:

A) Cualquier cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio pero no son iguales (N y G de la figura 2).

B) Cualquier cuadrilátero cuyas diagonales son iguales pero no se cortan en su punto medio (P, Q y T de la figura 2).

C) Cualquier cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, pero no son iguales o no se cortan en su punto medio (figuras T, M2, M y G de la figura 2).

D) Cualquier cuadrilátero cuyas diagonales son iguales y perpendiculares pero no se cortan en su punto medio (T de la figura 2).

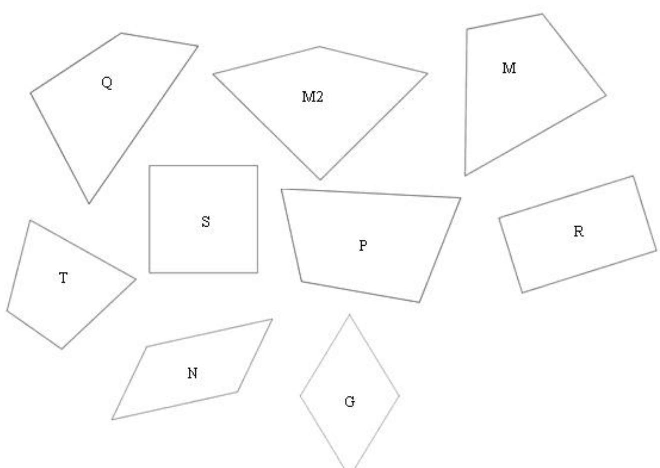

Figura 2. Contraejemplos

4. Reflexiones finales

Los aportes teóricos considerados ponen de manifiesto que el tratamiento de la demostración formal sin realizar previamente un acercamiento a través del planteo de conjeturas, formulaciones de hipótesis, desarrollo de argumentos, conduce a un aprendizaje memorístico y a confundir el propósito de la demostración (Battista y Clements, 1995). La propuesta de actividades presentadas apunta a que los estudiantes de un nivel terciario tengan un acercamiento a la demostración formal basado en las recomendaciones de la bibliografía consultada.

El trabajo se completará con el estudio de las producciones de los estudiantes durante la implementación de la propuesta, así como la identificación de sus limitaciones y potencialidades.

5. Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1999). *¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate.* Extraído de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resut2.html. Fecha de captura: 30/10/05.

Battista, T. y Clements, D. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher,* 88(1), 48-53.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics,* 14, 1, 11-18.

Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Mariotti, M.A. (2006). Proof an proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (2006). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Rotterdam: Sense Publishers; 185-216.

Ministerio de educación, ciencia y tecnología. (2004). *Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Primer Ciclo de EGB / Nivel Primario*. Extraído de http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html. Fecha de captura: 15/10/07.

Ministerio de educación, ciencia y tecnología. (2005). *Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Segundo Ciclo de EGB / Nivel Primario*. Extraído de http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html. Fecha de captura: 15/10/07.

Ministerio de educación, ciencia y tecnología. (2006). *Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Tercer Ciclo de EGB / Nivel Medio Matemática.* Extraído de http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html. Fecha de captura: 15/10/07.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática.* Sevilla: S.A.E.M. Thales.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Granada: S.A.E.M. Thales.

Renzulli, F. Y Scaglia, S. (2007). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de EGB 3 y futuros profesores de nivel inicial. *Revista de Educación Matemática, 22*, 2, 3-19.